II Espaces préhilbertiens - Espaces euclidiens

II.A Questions de cours :

* Montrer que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si ${}^tMM = I_n$ où M est la matrice de u dans une BON.
* Enoncer et démontrer le théorème de représentation des formes linéaires.
* Montrer qu'un endomorphisme orthogonal préserve le produit scalaire.
* Montrer que tout élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$.
* Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II.B Exercices :

Exercice 1: *

Déterminer f^* quand $f : x \mapsto \langle a\ ,\ x\rangle b - \langle b\ ,\ x\rangle a$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est-elle orthogonale ? une rotation ? Quels sont ses axes ?

Exercice 2: *

La matrice

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

est-elle orthogonale ? une rotation ? Quels sont ses axes ?

Exercice 3: *

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On considère la plan vectoriel P et la droite vectorielle D définis par :

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad / \quad x + y + z = 0 \right\} \qquad , \qquad D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad / \quad x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \bigoplus D$
2. Soit p la projection sur P parallèlement à D. Pour $u \in \mathbb{R}^3$ donner $p(u)$. Donner la matrice de l'endomorphisme p dans la base canonique.

Exercice 4: **

1. Démontrer que $\ker(u) = \ker(u^* \circ u)$
2. Démontrer que $\mathrm{im}(u^*) = \mathrm{im}(u^* \circ u)$

Exercice 5: **

Soit a, b, c trois réels. On pose $S = a + b + c$ et $\sigma = ab + bc + ac$ et $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

1. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$
2. Donner une CNS sur S et σ pour que $A \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$

Exercice 6: **

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux.
Démontrer $\ker(P(f)) \perp \ker(Q(f^*))$

Exercice 7: ***

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$n \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

2. A quelle condition a-t-on égalité ? Est-ce possible en dimension 3 ? 4 ?

(Indication : penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Exercice 8: ***

Soient a et b deux réels. On considère l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & aM + b\,{}^tM \end{array}$$

A quelle condition a-t-on f orthogonale ?

Exercice 9: ****

1. Montrer que $\mathcal{O}(E)$ est engendré par les réflexions.
   (Indication : montrer que toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.)
2. En déduire que $\mathcal{SO}(E)$ est engendré par les retournements.